Betragsfunktionen

Teil 5

LINEARE BETRAGSGLEICHUNGEN BETRAGSUNGLEICHUNGEN

REIN-QUADRATISCHE UNGLEICHUNGEN

Datei Nr. 41055

Klasse 11

Februar 2001

Friedrich W. Buckel

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

INHALT

Die Lösung der Aufgaben
befinden sich im Manuskript
Betragsfunktionen Teil 6
auf der Mathematik-CD

1. GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DES BETRAGS

Man hat den Betrag IxI einer Zahl x eingeführt, um eine Möglichkeit zu besitzen, diese Zahl positiv zu machen. So ist I 3 I = 3 aber es gilt auch I - 3 I = 3.
Man kann vereinfachend sagen: Der Betrag einer Zahl sei die Zahl ohne Vorzeichen.
Für mathematische Zwecke braucht man jedoch folgende Definition:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

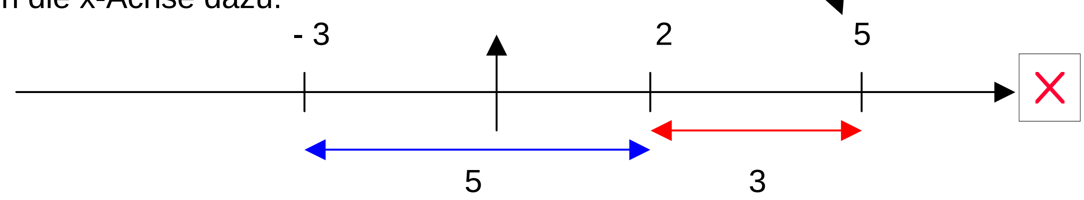
Denken wir uns eine Zahl auf der x-Achse markiert, dann hat die Zahl 3 vom Ursprung den Abstand 3, genauso aber auch die Zahl -3. Also haben wir eine erste Interpretationsmöglichkeit:

IxI ist auf der x-Achse der Abstand der Zahl x von Ursprung

Nun sehen wir uns die Funktion $f(x) = |x - 2|$ an. Wir stellen eine Wertetebelle auf:

x	f(x)
-3	f(-3) = I - 5 I = 5
-2	f(-2) = I - 4 I = 4
-1	f(-1) = I - 3 I = 3
0	f(0) = I - 2 I = 2
1	f(1) = I - 1 I = 1
2	f(0) = I 0 I = 0
3	f(3) = I 1 I = 1
4	f(4) = I 2 I = 2
5	f(5) = I 3) = 3

Und nun die x-Achse dazu:



Unsere Funktion $f(x) = |x - 2|$ berechnet den Abstand der Zahl x von der Zahl 2.
Die Wertetafel zweigt dies klar an. Und in der Abbildung ist dies für zwei Zahlen vorgeführt: Um den Abstand der Zahl 2 und - 3 zu berechnen wird subtrahiert.
Damit das Ergebnis positiv bleibt (wie es sich für einen Abstand gehört), wetzen wir den Betrag: I - 3 - 2 I = I - 5 I _ 5 und I 5 - 2 I = I 3 I = 3:

I a - bI ist auf der x-Achse der Abstand der Zahlen a und b.

2. LINEARE BETRAGSGLEICHUNGEN

Aufgabe: Welche Zahlen haben von der Zahl 2 den Abstand 15 ?

Nun benützen wir die soeben behandelte Funktion $f(x) = |x-2|$. Sie gibt ja den Abstand der Zahl x von 2 an. Dieser soll nun 15 sein, d.h. wir haben die Betragsgleichung

$$|x-2| = 15$$

zu lösen. Dies ist ganz leicht, wenn man sich die x-Achse vor Aufgen hält. Gehen wir von der Zahl 2 aus um 15 Einheiten nach rechts, kommen wir zur Zahl 2 + 15 = 17. Gehen wir von 2 aus um 15 Einheiten nach linke, gelangen wir zu 2 - 15 = - 13. Also hat unsere Betragsgleichung die Lösungsmenge { - 13 ; 15 }.

Nun beschreiten wir einen algebraischen Weg. Dazu ersetzen wir das Argument x - 2 durch die Zahl A wie Argument. Man nennt dies auch eine Substitution. Substitutionen sollen eine Aufgabe dadurch einfacher machen, daß wir kompliziertes zunächst durch eine geeignete Ersetzung einfacher wachen.

Also: $|x-2| = 15$

Substitution: Es sei A = x - 2.

Dann lautet unsere Ungleichung $|A| = 15$

Es gibt genau zwei Zahlen A, deren Betrag 15 ist: ± 15, also lautet der nächste Schritt: A = ± 15

Nun folgt die Rücksubstitution. Wir ersetzen A wieder durch x - 2 und erhalten:

$$x - 2 = \pm 15 \qquad | + 2$$

$$x = 2 \pm 15 = \begin{cases} 17 \\ -13 \end{cases}$$

Und wir haben unsere beiden Lösungszahlen gefunden.
Hier noch einmal der ganze Rechenweg zusammengefaßt:

$$|x-2| = 15$$

Substitution: A = x - 2

$$|A| = 15$$

$$A = \pm 15$$

Resubstitution:

$$x - 2 = \pm 15 \qquad | + 2$$

$$x = 2 \pm 15 = \begin{cases} 17 \\ -13 \end{cases}$$

Nun lassen wir die Substitution weg und sparen uns die Zeilen 2 bis 5. Folgt:

$$|x-2| = 15$$

$$x - 2 = \pm 15 \qquad | + 2$$

$$x = 2 \pm 15 = \begin{cases} 17 \\ -13 \end{cases}$$

Aufgabe: Welche Zahlen haben von der Zahl 13 den Abstand 27 ?

Kurzlösung:

$$\begin{aligned} |x-13| &= 27 \\ x-13 &= \pm 27 \quad | +13 \\ x = 13 \pm 27 &= \begin{cases} 40 \\ -14 \end{cases} \\ \mathbb{L} &= \{40; -14\} \end{aligned}$$

Aufgabe: Welche Zahlen haben von der Zahl - 7 den Abstand 5 ?

Jetzt müssen wir beachten, daß wir die gesuchte Zahl x und - 7 subtrahieren müssen, dies ergibt $x - (-7) = x + 7$!

$$\begin{aligned} |x+7| &= 5 \\ x+7 &= \pm 5 \quad | + -7 \\ x = -7 \pm 5 &= \begin{cases} -2 \\ -12 \end{cases} \\ \mathbb{L} &= \{-2; -12\} \end{aligned}$$

Meistens werden Aufgaben in dieser Form nicht gestellt, sondern wir haben einfach Betragsgleichungen zu lösen. Schauen wir uns dazu vier Musterbeispiele an:

$$\begin{aligned} |x-3| &= 2 \\ x-3 &= \pm 2 \\ x = 3 \pm 2 &= \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \\ \mathbb{L} &= \{1; 5\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x+8| &= 8 \\ x+8 &= \pm 8 \\ x = -8 \pm 8 &= \begin{cases} 0 \\ -16 \end{cases} \\ \mathbb{L} &= \{0; -16\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |3x-15| &= 6 \\ 3x-15 &= \pm 6 \\ 3x = 15 \pm 6 &= \begin{cases} 21 \\ 9 \end{cases} \\ x_1 = 7, &\quad x_2 = 3 \\ \mathbb{L} &= \{3; 7\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{1}{2}x+3\right| &= 8 \\ \tfrac{1}{2}x+3 &= \pm 8 \\ \tfrac{1}{2}x = 3 \pm 8 &= \begin{cases} 11 \\ -5 \end{cases} \\ x_1 = 22, &\quad x_2 = -10 \\ \mathbb{L} &= \{22; -10\} \end{aligned}$$

Aufgaben

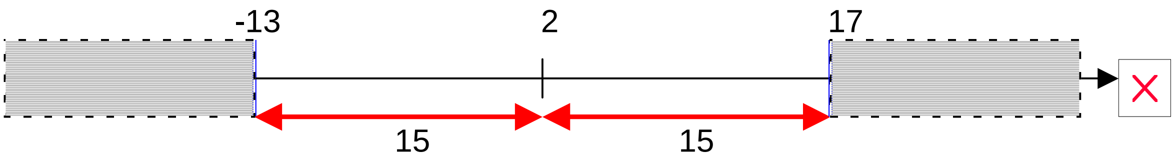
(1)	$\lvert x+7 \rvert = 17$	(2)	$\lvert x-4 \rvert = 1$	(3)	$\lvert x+12 \rvert = 16$
(4)	$\lvert x+4 \rvert = 36$	(5)	$\lvert x-3 \rvert = -6$	(6)	$\lvert 5x-2 \rvert = 3$
(7)	$\lvert 12x+10 \rvert = 34$	(8)	$\lvert \tfrac{1}{4}x+3 \rvert = 7$	(9)	$\lvert \tfrac{4}{7}x+\tfrac{2}{3} \rvert = \tfrac{5}{4}$

3. LINEARE BETRAGS-UNGLEICHUNGEN

Die erste Aufgabe auf Seite 3 lautete $|x-2| = 15$. Jetzt machen wir zwei Ungleichungen daraus: $|x-2| > 15$ und $|x-2| < 15$.

Da wir die Betragsgleichung lösen können: $\mathbb{L} = \{-13;17\}$, und da wir ferner die geometrische Bedeutung der linearen Betragsfunktion kennen, lassen sich die Lösungsmengen der Ungleichungen an Hand der x-Achse leicht finden:

Bei $|x-2| > 15$ sucht man die Zahlen x, deren Abstand zur Zahl 2 größer als 15 ist, und bei $|x-2| < 15$ werden Zahlen gesucht, deren Abstand von 2 kleiner als 15 ist.



Von 2 aus gehen wir um 15 nach links zur Zahl - 13. Alles was noch weiter links davon liegt, hat von 2 einen Abstand größer als 2. Gehen wir von 2 aus um 15 nach rechts, kommen wir zur Zahl 25. Alle Zahlen rechts davon haben von 2 einen Abstand größer als 15.

Also hat die Ungleichung $|x-2| > 15$ die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} =]-\infty;-13[\cup]17;\infty[= \mathbb{R} \setminus [-13;17].$$

Und sofort erkennt man auch, daß das Intervall $]-13;17[$ die Lösungsmenge der Ungleichung $|x-2| < 15$ darstellt, denn alle Zahlen zwischen - 13 und 17 haben von 2 einen Abstand, der Kleiner als 15 ist.

Wir müssen jetzt ab er wieder eine Lösungsmethode haben, die nicht diesen umständlichen graphischen Weg geht. Es gibt jedoch keinen einheitlichen Weg. Die > Ungleichung geht andere Lösungswege wie die < Ungleichung.

DIE KLEINER - UNGLEICHUNG

Beispiel 1: Die Kleiner-Ungleichung: $\left|x-2\right|<15$.

vereinfachen wir mit einer Substitution zu $\left|A\right|<15$.

Alle Zahlen zwischen - 15 und 15 haben einen Betrag kleiner als 15, also lautet die nächste Rechenzeile: - 15 < A < 15

Rücksubstitution: - 15 < x - 2 < 15 I + 2

13 < x < 17

Und dies kann man auch so schreiben: $\mathbb{L}=]-13;17[$

Kurzmethode:

$$\boxed{\begin{gathered}\left|x-2\right|<15\\ -15<x-2<15 \quad \left|+2\right.\\ -13<x<17\\ \mathbb{L}=]-13;17[\end{gathered}}$$

Beispiel 2: $\left|x+13\right|<3$

d.h.

$$-3<x+13<3$$
$$-3-13<x<3-13$$
$$-16<x<-10$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L}=]-16;-10[$

***Beispiel 3*:** $\left|3x+4\right|<10$

$$-10<3x+4<10$$
$$-14<3x<6$$
$$-\tfrac{14}{3}<x<2$$
$$\mathbb{L}=]-\tfrac{14}{3};2[$$

***Beispiel 4*:** $\left|-\frac{1}{3}x+2\right|\le 4$

Wir haben in früheren Manuskripten gelernt, daß man die Vorzeichen des Arguments vertauschen darf. So ist $\left|-5\right|=\left|5\right|$, $\left|-x+4\right|=\left|x-4\right|$ und $\left|-\frac{1}{3}x+2\right|=\left|\frac{1}{3}x-2\right|$.

Tritt also dieser Fall mit negativem Koeffizienten auf, dann formen wir um:

$$\left|\tfrac{1}{3}x-2\right|\le 4$$
$$-4\le\tfrac{1}{3}x-2\le 4$$
$$-2\le\tfrac{1}{3}x\le 6$$
$$-6\le x\le 18$$
$$\mathbb{L}=[-6;18]$$

Aufgaben:

(10) $\left|2x+5\right|<5$ (11) $\left|5x+3\right|<-2$ (12) $\left|\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right|\le 4$

(13) $\left|\frac{3}{4}x-5\right|\le\frac{5}{4}$ (14) $\left|\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\right|<\frac{4}{5}$ (15) $\left|4x+3\right|<-8$

DIE GRÖSSER-UNGLEICHUNG

Beispiel 5: $|x-2|>15$

Es gibt eine einfache Merkregel, die auf dem Abstands-Hintergrund des Betrages basiert. Bei einer Kleiner-Ungleichung wie $|x-2|<15$ erhält man Zahlen deren Abstand kleiner ist als die rechte Zahl angibt, also liegt die Lösungsmenge zwischen zwei Grenzen, weshalb die Umformung der Betragsungleichung eine Doppelungleichung der Form $a < x < b$ ergibt.

Liegt jedoch eine Größer-Ungleichung vor, dann besteht die Lösungsmenge aus den Zahlen, die einen Abstand aufweisen, der größer als z.B. 15 ist. Also liegen sie außerhalb eines solchen Intervalls, und zwar links außen oder rechts außen.

Die algebraische Umformung führt daher auf zwei getrennte Ungleichungen, eine zur Beschreibung der Zahlen links außen, einmal zur Beschreibung der Zahlen rechts außen. Dies zeigt eindrucksvoll die Grafik auf Seite 5**.** **Nun die Methode**:

$$|x-2|>15$$

Substitution: A = x - 2: $|A|>15$

Zahlen mit einem Betrag größer als 15 liegen entweder links von - 15, wie - 16 usw. oder rechts von + 15. Also:

$$A<-15 \quad \text{oder} \quad A>15$$

Rücksubstitution: $x-2<-15 \quad \text{oder} \quad x-2>15 \qquad |+2$

d.h. $x<-13 \quad \text{oder} \quad x>17$

Wir lassen künftig die Substitution weg und erhalten diese Kurzmethode:

$$|x-2|>15$$
$$x-2<-15 \;\text{ oder }\; x-2>+15 \;|+2$$
$$x<-13 \;\text{ oder }\; x>17$$
$$\mathbf{L}=]-\infty;-13[\;\cup\;]17;\infty[$$
oder
$$\mathbf{L}=\mathbf{R}\setminus[-13\,;17]$$

Beispiel (7): $|x+5|>12$
$$x+5<-12 \text{ oder } x+5>+12$$
$$x<-17 \;\text{ oder }\; x>7$$
$$\mathbf{L}=]-\infty;-17[\;\cup\;]7;\infty[$$
$$\mathbf{L}=\mathbf{R}\setminus[-17\,;7]$$

Beispiel (8): $|x+15|\ge 3$
$$x+15\le -3 \text{ oder } x+15\ge +3$$
$$x\le -18 \text{ oder } x\ge -12$$
$$\mathbf{L}=]-\infty;-18]\cup[-12;\infty[$$
$$\mathbf{L}=\mathbf{R}\setminus]-18;-12[$$

Aufgaben: (16) $\left|\frac{1}{2}x-6\right|>2$ (17) $|3x-5|>7$ (18) $\left|\frac{7}{2}x-2\right|\ge 2$

(19) $|-2x-3|>6$ (20) $|-2x+3|\ge 6$ (21) $|3x+3|>9$

5. LINEARE BETRAGS-UNGLEICHUNGEN

Wir haben nun drei gänzlich verschiedene Methoden für

$|2x+3|=5$ $\qquad$ $|2x+3|<5$ $\qquad$ $|2x+3|>5$

Wer diese durcheinanderbringt, erhält Unsinn. Der häufigste Fehler besteht darin, die Gleichungsmethode, nämlich aus $|2x+3|=5$ die Gleichung $2x+3=\pm 5$ zu machen, auf die Ungleichungen anzuwenden, etwa um aus $|2x+3|<5$ die Ungleichung $2x+3<\pm 5$ zu machen. Dies ist Quatsch.

Hier nochmals alle drei Lösungsmethoden nebeneinander:

Beipsiel (9)	Beispiel (10)	Beispiel (11)
$\|2x+3\|=5$	$\|2x+3\|<5$	$\|2x+3\|>5$
$2x+3=\pm 5$	$-5<2x+3<5$	$2x+3<-5$ oder $2x+3>+5$
$2x=-3\pm 5=\begin{cases}2\\-8\end{cases}$	$-8<2x<2$	$2x<-8$ oder $2x>2$
$x_1=1;\ x_2=-4$	$-4<x<1$	$x<-4$ oder $x>1$
$\mathbf{L}=\{1;-4\}$	$\mathbf{L}=]-4;1[$	$\mathbf{L}=]-\infty;-4[\,\cup\,]1;\infty[$ $\mathbf{L}=\mathbf{R}\setminus[-4;1]$

Allgemein:

$\|ax+b\|=c$	$\|ax+b\|<c$	$\|ax+b\|>c$
$ax+b=\pm c$	$-c<ax+b<c$	$ax+b<-c$ oder $ax+b>+c$

wobei c > 0 sein muß.

Aufgaben

(22)	$\|3x-8\|=5$	(23)	$\|3x-8\|<5$	(24)	$\|3x-8\|>5$
(25)	$\|\frac{1}{2}x-5\|=2$	(26)	$\|\frac{1}{2}x-5\|\ge 2$	(27)	$\|\frac{1}{2}x-5\|\le 2$
(28)	$\|-3x+15\|=21$	(29)	$\|-3x+15\|<21$	(30)	$\|-3x+15\|>21$
(31)	$\|5x+1\|=6$	(32)	$\|5x+1\|\le 6$	(33)	$\|5x+1\|\ge 6$

Die Lösungen sind auf der Mathematik - CD.

6. REINQUADRATISCHE UN-/GLEICHUNGEN

Mancher könnte jetzt überrascht sein, was quadratische Ungleichungen in einem Kapitel über Betragsungleichungen zu suchen haben. Das wird schnell klar, wenn man sich an folgende Tatsache erinnert:

Per Definition ist eine Quadratwurzel diejenige ***positive*** Zahl, deren Quadtrat der Radikand ist.
Daher ist $\sqrt{9}=3$ und nicht wie manche Schüler irgendwann meinen: $\sqrt{9}=\pm3$, denn nicht nur $3^2 = 9$, denn auch $(-3)^2 =9$. Der Grund , warum man sich auf die positiven Zahlen beschränken **muß**, liegt darin, daß die Rechenart "Wurzelziehen" ein eindeutiges Ergebnis braucht, genau auch wie die anderen Rechenarten, Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division und Potenzieren.

Daher muß man z.B. auf folgendes achten: $\sqrt{(-3)^2}=3$ und nicht $\sqrt{(-3)^2}=-3$.
Es gibt nämlich eine Regel, die oft so interpretiert wird, daß Wurzelziehen und Quadrieren Umkehroperationen sind, wonach also die Quadratwurzel das Quadrat aufhebt. Dies ist hier falsch. Richtig muß es heißen:

$$\sqrt{(-3)^2}=3.$$

Daraus ergibt sich ein Problem:

Was ist dann $\sqrt{a^2}$??

Gilt hier $\sqrt{a^2}=a$? (1)

Wir müssen dies austesten.

a) Wenn a = 3 ist, dann heißt die Zeile (1) $\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$

Hier gilt also tatsächlich $\sqrt{a^2}=a$

b) Ist aber a = - 3 ist, dann heißt die Zeile (1): $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

Dies ist aber nicht mehr die Gleichung $\sqrt{a^2}=a$

Denn nach ihrer Aussage müßte rechts - 3 steht. Dort steht aber 3, also -a.

Daraus wird klar, daß wie eine Fallunterscheidung machen müssen, damit die Formel allgemein anwendbar wird:

$$\boxed{\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & \text{wenn } a\geq 0 \text{ ist} \\ -a & \text{wenn } a<0 \text{ ist}\end{cases}}$$

Und wer nun doch die Formel für den Betrag von Seite 2 im Kopf hat, der sieht, daß dies genau die Definition für den Betrag ist. Also gilt streng genommen:

$$\boxed{\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & \text{wenn } a\geq 0 \text{ ist} \\ -a & \text{wenn } a<0 \text{ ist}\end{cases}}$$

Nach diesen Grundkenntnissen können wir zunächst

REINQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

zuwenden:

Gegeben ist: $x^2 = 81$

Ziehen wir die Wurzel: $|x| = 9$

Denn $\sqrt{x^2} = |x|$

Und jetzt lösen wir die Betragsgleichung: $x = \pm 9$

Hier noch drei Beispiele:

a)	b)	c)
$x^2 = 32$	$x^2 = 36$	$x^2 = 250$
$\lvert x \rvert = \sqrt{32}$	$\lvert x \rvert = 6$	$\lvert x \rvert = \sqrt{250}$
$x = \pm 4\sqrt{2}$	$x = \pm 6$	$x = \pm 5\sqrt{10}$
$\mathbb{L} = \{\pm 4\sqrt{2}\}$	$\mathbb{L} = \{6; -6\}$	$\mathbb{L} = \{\pm 5\sqrt{10}\}$

REINQUADRATISCHE KLEINER-UNGLEICHUNG

Gegeben ist: $x^2 < 81$

Wurzel ziehen: $|x| < 9$

WARNUNG: Jetzt darf man nicht dieselbe Methode wie bei Gleichungen anwenden: Der nächste Schritt $x < \pm 9$ wäre falsch!

Jetzt geht man so vor, wie man es bei den Betragsungleichungen gelernt hat.
< 9 bedeutet, daß die Lösungsmenge den Radius 9 hat um den Mittelpunkt 0:
Also: $-9 < x < 9$
Und damit steht auch die Lösungsmenge fest: $\mathbb{L} =]-9;9[$

d)	e)	f)
$x^2 < 50$	$x^2 < 12$	$x^2 \le 100$
$\lvert x \rvert < \sqrt{50}$	$\lvert x \rvert < \sqrt{12}$	$\lvert x \rvert \le 10$
$-\sqrt{50} < x < \sqrt{50}$	$-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$	$-10 < x < 10$
$-5\sqrt{2} < x < 5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$	
$\mathbb{L} =]-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}[$	$\mathbb{L} =]-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}[$	$\mathbb{L} =]-10;10[$

Im Beispiel f) war auch noch die Gleichheit eingeschlossen, was aber problemlos läuft, weil man dieses Gleichheitszeichen einfach mitschleppt.

REINQUADRATISCHE GRÖSSER-UNGLEICHUNG

Gegeben ist: $x^2 > 81$
Wurzel ziehen: $|x| > 9$

Jetzt geht man so vor, wie man es bei den Betragsungleichungen gelernt hat. > 9 bedeutet, daß alle Zahlen der Lösungsmenge einen Abstand von 0 haben, der größer als 9 ist, also gibt es einen linken Außenbereich und einen rechten Außenbereich. Die Lösung liegt also **links oder rechts**

Also: $x < -9$ oder $x > 9$
Lösungsmenge daher: $\mathbb{L} =]-\infty;-9] \cup [9;\infty[$
bzw. kürzer: $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-9;9]$

Drei weitere Beispiele:

g)	h)	i)
$x^2 > 49$	$x^2 > 20$	$x^2 \geq 64$
$\|x\| < 7$	$\|x\| > \sqrt{20}$	$\|x\| \geq 8$
$x < -7$ oder $x > 7$	$x < -2\sqrt{5}$ oder $x > 2\sqrt{5}$	$x \geq -8$ oder $x \geq 8$
$\mathbb{L} =]-\infty;-7[\cup]7;\infty[$	$\mathbb{L} =]-\infty;-2\sqrt{5}[\cup]2\sqrt{5};\infty$	$\mathbb{L} =]-\infty;-8[\cup]8;\infty[$
oder $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-7;-9]$	oder $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-2\sqrt{5};2\sqrt{5}]$	oder $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-8;8]$

GEMISCHTQUADRATISCHE GLEICHUNGEN

Wir erweitern das soeben Gelernte ein wenig.
Auf Seite 10 haben gelernt die Gleichung $x^2 = 81$ zu lösen. Nun verändern wir die Aufgabe so: $(x+4)^2 = 81$

1. Lösungsweg:
ausquadrieren:

$$x^2 + 8x + 16 = 81$$
$$x^2 + 8x - 65 = 0$$

Lösungformel verwenden, z.B.:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 65}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{324}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 18}{2} = \begin{cases} 5 \\ -13 \end{cases}$$

2. Lösungsweg

$$(x+4)^2 = 81 \quad |\sqrt{}$$
$$|x+4| = 9$$
$$x + 4 = \pm 9$$
$$x_{1,2} = -4 \pm 9 = \begin{cases} 5 \\ -13 \end{cases}$$

Welcher Weg ist der elegantere, kürzere und auch weniger fehleranfällige ?
Die Antwort muß man nicht anschreiben!
Diese Methode geht aber nur für diese Form: $\boxed{(ax+b)^2 = c}$

Noch drei Beispiele:

j)
$$\left(x-6\right)^2=100$$
$$\left|x-6\right|=10$$
$$x+6=\pm 10$$
$$x_{1,2}=-6\pm 10=\begin{cases}4\\-16\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{4;-16\}$$

k)
$$\left(x-3\right)^2=12$$
$$\left|x-3\right|=\sqrt{12}$$
$$x-3=\pm\sqrt{12}$$
$$x_{1,2}=3\pm 2\sqrt{3}$$
$$\mathbf{L}=\{3+2\sqrt{3};3-2\sqrt{3}\}$$

l)
$$\left(\tfrac{1}{2}x+8\right)^2=4$$
$$\left|\tfrac{1}{2}x+8\right|=2$$
$$\tfrac{1}{2}x+8=\pm 2$$
$$x_{1,2}=2\left(-8\pm 2\right)=\begin{cases}-12\\-20\end{cases}$$
$$\mathbf{L}=\{-12;-20\}$$

Genauso kann man natürlich auch gemischt-quadratische Ungleichungen behandeln:

m)
$$\left(x+4\right)^2<25$$
$$\left|x+4\right|<5$$
$$-5<x+4<5 \quad \left|-4\right.$$
$$-9<x<1$$
$$\mathbf{L}=]-9;1[$$

n)
$$\left(2x-1\right)^2\le 40$$
$$\left|2x-1\right|\le\sqrt{40}$$
$$-\sqrt{40}\le 2x-1\le\sqrt{40} \quad \left|+1\right.$$
$$1-\sqrt{40}\le x\le 1+\sqrt{40}$$
$$\mathbf{L}=\left[1-\sqrt{40};1+\sqrt{40}\right]$$

o)
$$\left(\tfrac{1}{4}x-2\right)^2>9$$
$$\left|\tfrac{1}{4}x-2\right|>3$$
$$\tfrac{1}{4}x-2<-3 \text{ oder } \tfrac{1}{4}x-2>3$$
$$\tfrac{1}{4}x<-1 \text{ oder } \tfrac{1}{4}x>5$$
$$x<-4 \text{ oder } x>20$$

$$\mathbf{L}=]\infty;-4[\cup]20;\infty[$$
$$\text{oder } \mathbf{L}=\mathbf{R}\setminus[4;20]$$

p)
$$\left(-2x+3\right)^2\ge 18$$
$$\left|-2x+3\right|\ge\sqrt{18}$$
$$\left|2x-3\right|\ge\sqrt{18}$$
$$2x-3\le-\sqrt{18} \text{ oder } 2x-3\ge\sqrt{18}$$
$$2x\le 3-\sqrt{18} \text{ oder } 2x\ge 3+\sqrt{18}$$
$$x\le\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{2} \text{ oder } x\ge\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}$$
$$\mathbf{L}=]\infty;\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{2}]\cup[\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{10};\infty[$$
$$\text{oder } \mathbf{L}=\mathbf{R}\setminus]\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{2};\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}[$$

Aufgaben

(34)	$\left(2x-5\right)^2=49$	(35)	$\left(3x+2\right)^2=27$	(36)	$\left(\tfrac{1}{8}x-1\right)^2=\tfrac{1}{4}$
(37)	$x^2<16$	(38)	$\tfrac{1}{4}x^2>12$	(39)	$\tfrac{1}{2}x^2\le 32$
(40)	$\left(x+9\right)^2\ge 49$	(41)	$\left(-x+2\right)^2<1$	(42)	$\left(-\tfrac{1}{2}x-2\right)^2>2$
(43)	$x^2+4x+4\le 25$	(44)	$\left(3x-3\right)^2\le 48$	(45)	$\left(4-2x\right)^2+8>0$
(46)	$16-\left(\tfrac{1}{2}x+3\right)^2\ge 0$	(47)	$\left(\tfrac{2}{3}x-\tfrac{3}{4}\right)^2\le\tfrac{16}{9}$	(48)	$\left(-\tfrac{1}{9}x+2\right)^2\ge 108$